Fachberatung Mathematik
Hilde Zirkler
Goethe-Gymnasium Bensheim Bensheim, im Juni 2010

Übergang Klasse 10/11 (G9) und Klasse 9/10 (G8)
Mathematik

Übungsaufgaben zum Mittelstufenstoff im Fach Mathematik

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen
2. Systeme linearer Gleichungen
3. Reelle Zahlen
4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen
5. Potenzen
6. Potenzfunktionen
7. Flächen- und Körperberechnungen
8. Trigonometrie

   Nur für G9-Schüler:

9. Wachstumsprozesse, Exponentialfunktionen
10. Exponential- und Logarithmengleichungen

Lernhilfen

- Die eingeführten Mathematikbücher der Klassen 7, 8, 9 (und 10)
  Alle anderen Schulbücher zu diesen Klassenstufen (z.B. aus den Verlagen Klett, Schroedel, Cornelsen, bsv, …)
- Lernhilfen der Verlage (z.B. Training Mathematik aus dem Klett Verlag, Trainingshefte von Schroedel, Cornelsen, Nachschlagewerke von Duden-Paetec, …)
- Formelsammlungen Mathematik (z.B. Formelsammlung „Das große Tafelwerk“ – Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II für die Fächer Mathematik, Informatik, Astronomie, Physik, Chemie, Biologie aus dem Cornelsen Verlag; das entsprechende Werk aus dem Verlag Duden-Paetec; Formelsammlungen Mathematik von Duden, Schroedel, Klett, …)
- Übungsaufgaben und Tests der vergangenen Jahre bei www.mathe-fachberater.de

Termine

1. Bearbeitung der Aufgaben bis zum 4.September 2010
2. Bekanntgabe der Lösungen ab 4. September 2010 durch die Fachlehrer
   (auch bei: www.mathe-fachberater.de)
3. Vorläufiger Termin für den Test: Montag, 13. September 2010, 3./4. Stunde

1. Lineare Funktionen und lineare Gleichungen; Terme

Aufgabe 1

Die Gerade g enthält den Punkt A(-1|4) und hat die Steigung m = $-\frac{1}{2}$.
Die Gerade h hat die Steigung m = 2 und schneidet die Gerade g auf der 2. Achse (y-Achse).

a. Zeichnen Sie die Geraden g und h in ein geeignetes Koordinatensystem.
b. Bestimmen Sie für beide Geraden die zugehörigen Gleichungen.
c. Zeigen Sie, dass die beiden Geraden orthogonal zueinander sind.
d. Die beiden Geraden schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.
e. Es gibt eine Parallele zur y-Achse, die die Dreiecksfläche aus d. halbiert. Bestimmen Sie den zugehörigen x-Wert für diese Parallele.

Aufgabe 2

Marie begleitet ihre Eltern auf einer Wochenendreise nach Berlin. Die Familie hat ein Einzel- und ein Doppelzimmer gebucht. Für das Einzelzimmer verlangt das Hotel 80% des Preises für ein Doppelzimmer. Für zwei Übernachtungen zahlen sie insgesamt 342€. Berechnen Sie die Preise für ein Einzel- und ein Doppelzimmer.

2. Systeme linearer Gleichungen

Aufgabe 1

a. Lösen Sie das LGS mit Hilfe eines Verfahrens Ihrer Wahl und machen Sie danach die Probe. Die Taschenrechnerlösung reicht nicht!

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & x + 4y = 6 - 5x \\ \text{II)} & 2x - y = x - 2y - 2 \end{array}$$

b. Vereinfachen Sie auch hier zunächst die Gleichungen des linearen Gleichungssystems und lösen Sie dieses System dann mit Hilfe des Additionsverfahrens.
Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & (2x - 3)^2 - x(x + 2) + 1 = y + 3x^2 \\ \text{II)} & 5(x + 3) = 3(x - y) + 5 \end{array}$$

c. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem. Die Lösungsvariablen seien x und y, die Formvariable sei a.

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & 6x + ay = 3a + 2 \\ \text{II)} & 2x - a = 3ay - 6 \end{array}$$

Welche Bedingung muss die Formvariable a erfüllen, damit das Gleichungssystem genau eine Lösung hat?

Aufgabe 2

Jan und Marie laden Freunde zum Grillen ein. Jan kauft zwanzig T-Bone-Steaks und zehn Holzfällersteaks. Dafür zahlt er insgesamt 144,50€. Marie schimpft mit Jan: „Bei zehn T-Bone-Steaks und zwanzig Holzfällersteaks hättest du zusätzlich zwei Kilogramm Würstchen zu 4,80€ pro Kilogramm kaufen können und immer noch 21,40€ gespart. Das hätte dann auch noch für die fünf Flaschen Wein gereicht, die du natürlich vergessen hast.“
Berechnen Sie die Preise für ein T-Bone-Steak, ein Holzfällersteak und eine Flasche Wein.

3. Reelle Zahlen

Aufgabe 1

a. Vereinfachen Sie die Terme.

1. $\sqrt{27xy} : \sqrt{\frac{3x}{y}} =$ 2. $\frac{\sqrt{85{,}75}}{\sqrt{7}} =$

b. Machen Sie den Nenner rational. Schreiben Sie alle Umformungen auf.

1. $\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{1000}} =$ 2. $\frac{b\sqrt{7a}}{\sqrt{ab^3}} =$

Aufgabe 2

Lösen Sie die beiden Wurzelgleichungen und machen Sie die Probe.
Geben Sie danach die Lösungsmenge an.

a. $3\sqrt{2x+5} = 2x+1$ b. $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x^2+6}} = \frac{4}{7}$

4. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Gegeben sind eine Parabel p und eine Gerade g mit den Funktionsgleichungen

$p: \quad p(x) = -2x^2 - 2x + 12$ und $g: \quad g(x) = -x + 2$

a. Bestimmen Sie für die Parabel p und für die Gerade g die Schnittpunkte mit der x-Achse. Nennen Sie diese Schnittpunkte N_1, N_2 und N_3.
b. Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel in der Scheitelpunktform an. Bestimmen Sie auch den Scheitelpunkt S der Parabel.
c. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse und nennen Sie ihn C.
d. Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g in ein gemeinsames Koordinatensystem.
e. Die Parabel p schneidet die Gerade g in den Punkten S_1 und S_2. Berechnen Sie diese Schnittpunkte ohne TR.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen können wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung, mit der pq-Formel oder mit der abc-Formel lösen.

abc-Formel	**pq-Formel**
$a x^2 + b x + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$
$\mathbf{x_{1/2}} =$	$\mathbf{x_{1/2}} =$

Gegeben ist nun die quadratische Gleichung $-10x^2 + 40x + 2520 = 0$.

a. Lösen Sie die Gleichung mit der abc-Formel: a = b = c =

b. Lösen Sie die Gleichung mit der pq-Formel. Bringen Sie die Gleichung zuerst auf die Normalform.

Normalform : ______________________ p = q =

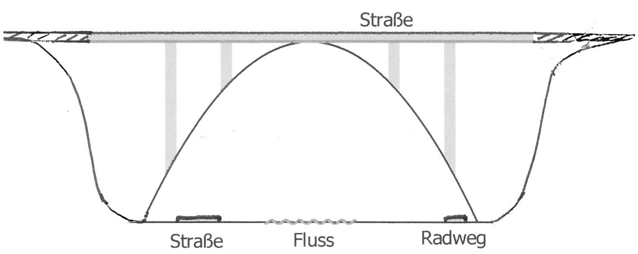
Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung ohne TR.

a. $x\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = x + \frac{3}{2}$

Aufgabe 4

Die Brückenkonstruktion über einem Flusstal hat die Form einer Parabel. Der Parabelbogen hat eine maximale Höhe von 40m. Die Breite des Bogens am Talgrund beträgt 150m.



a. Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem und bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für den Parabelbogen. Schreiben Sie alle Ansätze und Überlegungen auf.
b. Die Straße im Tal ist 10m breit. Der linke Straßenrand endet 10m vor dem Parabelbogen. Können Lastwagen mit hohen Aufbauten diese Straße auch weiterhin benutzen? Begründen Sie Ihre Antwort.
c. Der Radweg auf der rechten Seite ist nur 2m breit und endet mit dem rechten Rand 2m vor dem Parabelbogen. Folgende Alternativen werden diskutiert:
   1. Der Radweg wird zum Befahren frei gegeben.
   2. Man stellt ein Schild mit „Bitte absteigen“ auf.
   3. Man baut den Radweg näher an den Fluss.

   Geben Sie eine begründete Empfehlung.

5. Potenzen

1. Berechnen bzw. vereinfachen Sie. Wenden Sie die Potenzgesetze an.

   a. $9{,}5 \cdot 3^{6} + 2{,}5 \cdot 3^{6}$ b. $2{,}9^{10} : 2{,}9^{11}$

   c. $(3^{6})^{-3}$ d. $(c^{ac})^{2c}$

   e. $7^{ab} \cdot 7^{ab}$ f. $\dfrac{1{,}69^{ab}}{3{,}6^{2ab}} : \dfrac{1{,}3^{ab}}{3{,}24^{2ab}}$

2. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner und geben Sie das Ergebnis in der Normdarstellung an.
   Runden Sie dabei auf 3 Stellen nach dem Komma.

$$\frac{2 \cdot (1{,}8 + \sqrt{3{,}5}) - 1{,}3^{-3}}{(\sqrt[3]{100} - 4{,}8)^{2} + \frac{3}{7} \cdot 0{,}9}$$

6. Potenzfunktionen

Aufgabe 1

Wir betrachten Funktionen des Typs $f: x \mapsto a x^{n} + c$; $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

a. Gegeben sind die Funktionen f_1 bis f_3.

$f_1: x \mapsto \frac{1}{2}x^{2} + 5$; $x \in \mathbb{R}$ $f_2: x \mapsto -\frac{1}{10}x^{3} + 2$; $x \in \mathbb{R}$

$f_3: x \mapsto -\frac{1}{20}x^{4} - 1$; $x \in \mathbb{R}$

Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen f_1 bis f_3 in ein geeignetes Koordinatensystem.

b. Erklären Sie die Bedeutung des Faktors a und des Summanden c in der Gleichung $f(x) = a x^{n} + c$.

c. Berechnen Sie jeweils die x-Werte, für die man den Funktionswert 100 erhält. Falls das nicht möglich sein sollte, erklären Sie bitte, weshalb das so ist.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$.

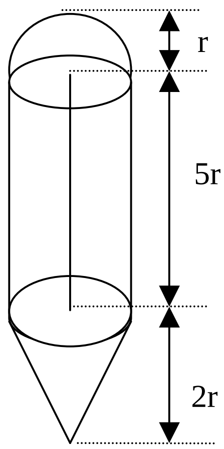
a. Definitionsmenge der Funktion f : D_f =

b. Legen Sie eine Wertetabelle an und zeichnen Sie danach das Schaubild der Funktion f in ein geeignetes Koordinatensystem. Sie können die Tabelle auch mit Hilfe des Taschenrechners erzeugen.
c. Beschreiben Sie das Verhalten des Schaubilds für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 2$.
d. Bestimmen Sie den x-Wert, der zum Funktionswert 10 gehört.

7. Flächen- und Körperberechnungen

Aufgabe 1

Gegeben ist der folgende Körper: Ein Kegel mit aufgesetztem Zylinder und einer Halbkugel als Abschluss. Alle Kreise haben den Radius r.



a. Berechnen Sie das Volumen V und die Oberfläche O des Körpers in Abhängigkeit von r.
b. Der Körper dient als Vorlage für Begrenzungspfähle aus Holz. Ein Pfahl soll die Masse 5kg haben.

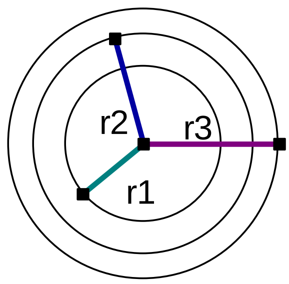
Die Dichte ρ des verwendeten Holzes beträgt $0{,}7\,\dfrac{g}{cm^3}$.

[$\rho = \dfrac{m}{V}$; m Masse, V Volumen)

Bestimmen Sie den Radius r, der zu dieser Vorgabe passt.
c. Die Holzpfähle mit den Maßen aus Aufgabe b. sollen auch einen Schutzanstrich erhalten. Für einen Quadratmeter benötigt man 75ml Schutzlack. Berechnen Sie die Lackmenge für 1000 Pfähle.

Aufgabe 2

Der innere Kreis mit dem Radius r_1 und die beiden äußeren Kreisringe haben jeweils den gleichen Flächeninhalt.



a. Bestimmen Sie die Radien r_2 und r_3 in Abhängigkeit von r_1.
b. Zeichnen Sie die Figur für r_1 = 2cm.
c. Denken Sie sich die Figur nun durch weitere Kreisringe mit der gleichen Eigenschaft nach außen erweitert. Geben Sie den Radius r_{10} für den neunten Kreisring an.
d. Nun sei r_1 = 2cm. Ab welchem Radienpaar r_n und r_{n+1} unterscheiden sich die Radien um weniger als 0,1cm? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Der Rechenweg ist etwas mühsam!

8. Trigonometrie

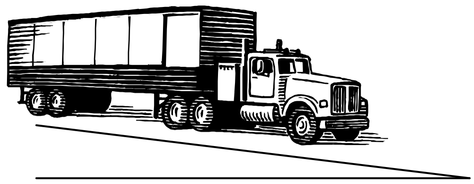
Aufgabe 1

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen für die Seiten und Winkel.
$c = 6cm$, $h_c = 3cm$, $b = 5cm$.

a. Konstruieren Sie das Dreieck ABC. (Zwei Möglichkeiten)
b. Berechnen Sie die Winkelgrößen und die Seitenlänge a.

Aufgabe 2

Ein Lastwagen fährt in den USA eine lange gerade Bergstraße mit der Geschwindigkeit 50mph (miles per hour) hinunter. Das Gefälle beträgt 6%. Vom Pass bis zur Talsohle benötigt der LKW 10 Minuten.



Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Pass und Talsohle. Geben Sie das Ergebnis in Metern an.

.Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen f_1 und f_2 mit $f_1(x) = \sin 2x$ und $f_2(x) = \cos \frac{1}{2} x$.

a. Zeichnen Sie die Schaubilder (Graphen) von f_1 und f_2 in ein geeignetes Koordinatensystem.
   Die Schaubilder sollen für das Intervall $[-\pi ; 4\pi]$ gezeichnet werden.
b. Geben Sie alle Schnittpunkte der beiden Schaubilder mit der x-Achse, die Hoch- und die Tiefpunkte an. Hier sollen die exakten Koordinaten der Punkte angegeben werden (z.B. $P(\pi|0)$).
c. Bestimmen Sie alle x-Werte im betrachteten Intervall, für die gilt $f_1(x) = \frac{1}{2}$ bzw. $f_2(x) = \frac{1}{2}$. Geben Sie diese x-Werte im Bogenmaß (als Vielfache von π) an.

9. Wachstumsprozesse

Aufgabe 1

Es liege ein exponentieller Wachstumsprozess vor. Bestimmen Sie jeweils den Wachstumsfaktor q für die folgenden Wachstumsangaben pro Zeiteinheit :

a. 150 %	q =	c. eine Zunahme um drei Zehntel	q =
b. 1 %	q =	d. eine Abnahme um ein Zehntel	q =

Aufgabe 2

Folgendes Angebot zum so genannten offshore banking stammt aus dem Internet:
Panamanian Bank savings accounts currently are paying an average of 4.5%. Some banks may of course offer a higher rate, but this is the net average.

a. Sie legen 10000US$ auf einem Panama-Sparkonto an. Mit wie viel Zinsen können Sie nach fünf Jahren rechnen, wenn alle anfallenden Zinsen auf dem Sparkonto verbleiben?
b. Eine deutsche Sparkasse bietet für ein Sparbuch eine Verzinsung von 0,5% an.
   Wie lange müssten 10000US$ auf einem Sparkassensparbuch angelegt werden, damit man die gleichen Zinseinnahmen wie bei a. hat?

Falls Sie der Wechselkurs interessiert: 1US$ = 0,82633€ (am 12.6.2010)
Bitte verschieben Sie nicht gleich Ihr ganzes Bankguthaben auf Off-shore-Konten!!!

10. Exponential- und Logarithmengleichungen

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen.
Runden Sie auf 4 Dezimalen. TR-Lösungen genügen nicht!!!

a. $200 = 1{,}5^{x}$ b. $200 = 1{,}5^{-x}$ c. $200 = 5 \cdot 1{,}5^{x}$

d. $200 \cdot 1{,}5^{1{,}5x-4} = 400$

Die Basis der Logarithmen sei 10.
e. $\lg (2 - x) = 2$ f. $\lg (x^2 - 21) = 2$

Aufgabe 2

Einige Schilddrüsenprobleme kann man mit radioaktivem Jod-131 therapieren. Die Halbwertszeit dieses Jod-Isotops beträgt 8,04 Tage. Eine Patientin erhält dieses Jod-131 in einer Kapsel mit der Aktivität 377,4MBq (MegaBecquerel). Die Schilddrüse nimmt 19% des radioaktiven Jods auf. 72 Stunden nach der Einnahme der Kapsel wird die Patientin entlassen. Die Aufnahme in der Schilddrüse soll hier sehr schnell erfolgen.

a. Berechnen Sie die Aktivität des radioaktiven Jods in der Schilddrüse zum Zeitpunkt der Entlassung.
b. Berechnen Sie die Anzahl der Tage, nach der die Aktivität in der Schilddrüse auf ein Tausendstel des Anfangswerts abgeklungen ist.